LUÍS M. AIRES

com

MARINA ALMEIDA

∞ +1

Uma jornada de (re)descoberta da matemática à boleia do mundo em que vivemos

EDIÇÕES SÍLABO

Para a minha querida Helena.

$\infty + 1$

Uma jornada de (re)descoberta da matemática à boleia do mundo em que vivemos

LUÍS M. AIRES

com

Marina Almeida

EDIÇÕES SÍLABO

Editor: Manuel Robalo

FICHA TÉCNICA

Título: Infinito +1
Autor: Luís M. Aires
© Edições Sílabo, Lda.
Capa: Pedro Mota
Imagem da capa: © Joingate | Dreamstime.com

1ª Edição – Lisboa, janeiro de 2015.
Impressão e acabamentos: Europress, Lda.
Depósito Legal: 386361/15
ISBN: 978-972-618-785-1

EDIÇÕES SÍLABO, LDA.

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Telf.: 218130345
Fax: 218166719
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

Índice

Prefácio

> «Este livro é para si, meu amigo. (...) Talvez que o meu amigo já tenha dito para consigo, por exemplo: por que será que quando tiro um balde de água de um poço, vai tudo muito bem enquanto o balde está dentro da água, mas quando sai dela pesa que nem chumbo? Por que será?»
>
> *A Física no Dia-a-Dia* (edição de 1995)

Esta foi a forma escolhida por Rómulo de Carvalho, ou poeta António Gedeão, para abraçar os seus leitores na crença de que a física pode ser entendida por qualquer um de nós. Partilho essa fé relativamente à matemática. Ilógica, dirão alguns. A imagem do perito em matemática como alguém de capacidades sobre-humanas está muito enraizada no ideário popular e, até, na comunidade escolar.

A minha opinião é conhecida: a matemática é um produto do nosso cérebro. Cérebro que, no geral, funciona ou pode ser treinado a funcionar de modo similar em todas as pessoas. Talvez, pela sua natureza mais abstrata, a tarefa de propagar a matemática seja menos fácil (estou a puxar a brasa à minha sardinha...), mas é uma tarefa possível e altamente provável. A premissa fundamental é gostar. Eu adoro a matemática. Daí o otimismo: o gosto pelas coisas é um poderoso catalisador. E costumamos gostar daquilo que podemos compreender. Existirá melhor maneira de nos tornarmos íntimos da matemática que «descobri-la» no mundo que nos define?

A presente obra é igualmente um tributo a duas instituições cujas vivificantes atmosferas intelectuais contribuem para (que) eu (tente) filtrar o melhor de mim: a Sílabo e a Escola Secundária António Gedeão, em Almada. A indicação de autoria, na capa, pretende destacar a mestria matemática da Professora Marina Almeida no aprimoramento deste manuscrito.

1

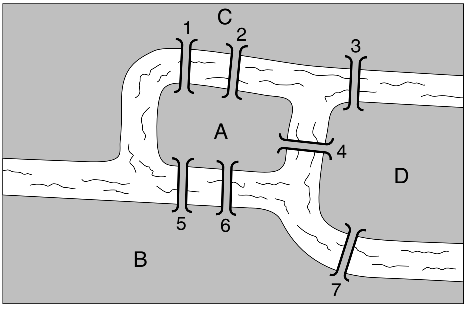
Königsberg

«É uma velha máxima minha que, quando tivermos excluído o impossível, tudo o que sobrar, mesmo que improvável, deverá ser verdadeiro.»

Expressão de Sherlock Holmes n'*O caso da Coroa de Berilos*.

Foi em 1735 que o grande matemático suíço Leonhard Euler, famoso, entre outras coisas, por avanços significativos no estudo dos números naturais, números complexos e séries infinitas, ficou intrigado com o chamado *Problema das Pontes de Königsberg*. Nessa altura, Königsberg era uma cidade da Prússia Oriental, dividida em várias secções pelo caprichoso leito do rio Pregel:

Figura 1.1



As diferentes zonas estavam ligadas por sete pontes. Imagine-se a passear a pé pela cidade numa tarde aprazível de domingo. Ainda que imbuído de entusiasmo e dono de umas pernas resistentes, o meu caro leitor, pessoa racional e parcimoniosa no esforço, pensa se haverá uma maneira de percorrer todas as pontes e a cidade atravessando uma – *e apenas uma* – vez cada ponte. Com um mapa da cidade nas mãos, começa por numerar as sete pontes. Depois, certo de que enfrenta tarefa fácil, testa apressadamente num canto do mapa um primeiro itinerário (faça de conta que a Figura 1.1 é o seu mapa, e desenhe a lápis um qualquer caminho):

> «– 1, 2, 3, 4, 5, 6... *Não...*»

Com esse circuito, para atravessar a ponte número 7, teria de repetir outra ponte, a 4 ou a 6 por exemplo.

> «– Vejamos, 1, 5, 7, 4, 2, 3... *Bolas!...*»

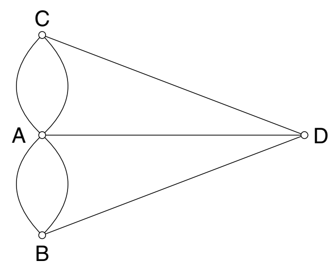
Após várias tentativas, chega à conclusão que não consegue uma solução satisfatória. «Serei só eu?», estará a perguntar-se. Ficaria aliviado ao saber que Euler demonstrou que, como formulado, o problema não tem solução. E o método escolhido é um bom exemplo do que os matemáticos designam *prova por contradição*: mostrar que uma ideia – «<u>não há</u> solução» – é verdadeira *porque o inverso é falso*. Por que razão «<u>há</u> uma solução para o problema das pontes de Königsberg» é falso?

Admitamos por um instante que, começando numa das quatro zonas (*A*, *B*, *C*, *D*) e terminando numa delas (possivelmente a mesma), *existe* uma maneira de atravessar todas as pontes uma única vez. Nesse caso, haverá pelo menos duas zonas que não estarão no início nem no fim do passeio, já que o objetivo é percorrer toda a cidade. E existindo uma ponte para aceder a uma determinada zona, terá de estar presente uma outra para daí sair, de modo a não repetir as pontes; significa que cada região deverá possuir um número *par* de passagens, pois

> entrada ≠ saída (2 pontes); se reentrarmos nessa zona por outra ponte, teremos de sair através de uma diferente das anteriores (4 pontes);...

Euler abordou o problema convertendo o mapa das pontes num *diagrama de rede*, um conjunto de pontos ligados por linhas:

Figura 1.2



Não parece representar o mapa, pois não? Os matemáticos prezam a abstração, e, ao contrário do que isso costuma induzir no público leigo, são adeptos da simplicidade. O diagrama de Euler equivale topologicamente ao mapa real, e é o que importa.

Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* assinalam os bancos (*B* e *C*) e as ilhas (*A* e *D*) do rio; as linhas são os caminhos permitidos pelas pontes; percebe-se facilmente que duas pontes conectam *A* e *B*. O matemático suíço decidiu então nomear cada ponto, ou nó, como «par» ou «ímpar» de acordo com o número de linhas que a ele chegam ou que dele partem. Analisando este, e muitos outros problemas similares, Euler concluiu o seguinte:

> Um circuito («passeio») em que cada via («ponte») seja percorrida apenas uma vez só pode ser concretizado quando não exista qualquer nó («zona») ímpar ou, existindo, serem dois; havendo dois nós ímpares, o caminho deve iniciar-se num deles e terminar no outro para que não ocorra dupla passagem numa dada via.

Se o leitor retornar à Figura 1.1, verificará que a ilha (nó) *A* tem cinco pontes (vias) enquanto as regiões *B*, *C* e *D* têm três. Ou seja, *todos* os nós do circuito são ímpares. Não haver solução para o problema das pontes é naturalmente a assunção correta, pois é falso *have*r solução.

Königsberg é hoje a cidade Kaliningrado, num enclave russo à beira do Mar Báltico. Além do nome, perdeu a fascinante arquitetura do século dezoito às mãos dos bombardeamentos aéreos de 1944, que obliteraram algumas das suas velhas pontes. Após reconstrução, e conversão num daqueles cinzentos portos industriais típicos da era soviética, Kaliningrado possui agora cinco pontes, as quais, curiosamente, permitem aos seus habitantes (re)descobrir a cidade sem terem de passar duas vezes por cada ponte.

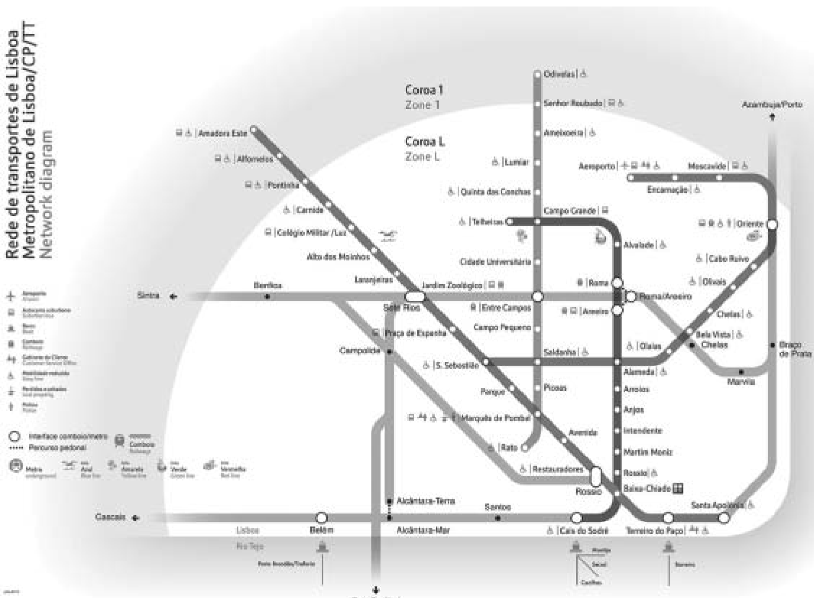
O problema de Königsberg, aparte o seu caráter recreativo, desenvolveu importantes ramificações práticas no mundo moderno. Uma delas é conseguir que um carteiro ou um leitor de contadores de eletricidade realize a sua volta sem (muitas...) passagens repetidas pelas diferentes ruas. Uma história bem conhecida é a de uma empresa de distribuição de eletricidade que, tendo 24 funcionários para cobrir os contadores de um certo distrito citadino, e uma crise financeira omnipresente, resolveu arregaçar as mangas para estabelecer um novo e mais económico circuito de leituras. O ajustamento «euleriano» do traçado envolveu transformar o maior número possível de nós ímpares em nós pares. Depois disso, a empresa passou a empregar somente 15 leitores, numa redução de 40% do tempo necessário para o trabalho global, o que deixou os 9 funcionários dispensados a amaldiçoar o dia em que Euler se entreteve com Königsberg. O problema torna-se complexo quando a tarefa exige passar pelos dois lados das ruas em sentidos contrários, como sucede com os carteiros ou com aqueles veículos dotados de escovas rotativas que limpam afanosamente as bermas das estradas, mas a solução continua a assentar em fórmulas (mais avançadas) das regras de Euler.

Volvendo ao problema das pontes, o sucesso emanou do facto de Euler ter ponderado, acima de tudo, a *rede* formada pelos pontos geográficos. Isso conduz-nos a uma outra ramificação, a topologia. Euler percebeu que a real disposição do rio Pregel, das zonas e pontes, ou seja, a geometria do problema, era irrelevante para a solução: a situação podia ser reduzida a uma rede gráfica, de pontos e linhas. É a independência face à geometria tradicional que define a abordagem topológica, uma disciplina matemática por muitos denominada como «a geometria folha de borracha», uma vez que pegamos num mapa real e o torcemos ou alongamos até se tornar num desenho mais...

cómodo. Uma curiosidade: o nome «topologia» vem do grego, *topos logo*, «o estudo da posição». Que utilidade poderá ter para o comum dos mortais? Se for utilizador do metropolitano de Lisboa, o meu amigo leitor já terá experimentado as virtudes da topologia sem dar conta.

Nos primeiros contactos com este meio de transporte qualquer passageiro necessita consultar o diagrama da rede para saber como ir de *A* para *B*: «Vou na linha verde até à estação *X*, mudo para a linha vermelha e saio em *B*». Nada difícil. É mais exigente ler um mapa da cidade com linhas e bolinhas que representem o caminho e paragens *realmente* seguidos pelos comboios subterrâneos. O site do Metro de Lisboa tem esse *mapa* disponível. Comparando-o com o *diagrama de rede*, reconhecerá que a correspondência visual entre ambos é limitada: o diagrama não foi desenhado à mesma escala, a posição e as distâncias relativas entre estações encontram-se, digamos, «prensadas». Para o turista acidental ou para o viajante intensivo o mais importante é a informação, não a paisagem! E a informação do diagrama está correta, mostrando claramente a ordem das estações e as intersecções de linhas e, desse modo, como ir de *A* a *B*.

Figura 1.3. Diagrama da rede do Metro de Lisboa



Atingimos este ponto vindos do método de dedução de Sherlock Holmes, *reductio ad absurdum*, «se não é absurdo, deverá ser verdadeiro». Mas, que vantagem resulta de preocuparmo-nos em *provar* que o problema das pontes não tem solução? Se tivesse, decerto alguém já teria descoberto e anunciado isso, não acha? Todavia, entre os matemáticos, este tipo de argumento não é válido. O ímpeto pela *demonstração*, que é um legado dos Antigos Gregos, viria a receber dos primeiros anos do século vinte um enquadramento racional de importantes consequências filosóficas.

Bertrand Russell, uma das mais interessantes figuras intelectuais britânicas, defendeu que a matemática podia derivar de princípios fundamentais da Lógica, não sendo portanto uma manifestação material do mundo em que vivemos nem um produto da mente humana. Assim, na opinião de Gottlob Frege, filósofo alemão contemporâneo de Russell, sendo as relações lógicas independentes da psicologia dos seres humanos, e inevitavelmente objetivas, um qualquer «edifício» da matemática, como a aritmética, pode ser sustentado pela demonstração de que o enunciado $2 + 3 = 3 + 2$, por exemplo, obedece ou respeita regras de procedimento corretas. O que uma prova matemática faz é revelar que a conclusão foi extraída logicamente das ideias de que se partiu (premissas); não prova que a conclusão seja verdadeira porque não pode provar que as premissas o são. Não se pode dizer que $2 + 3 = 3 + 2$ seja uma verdade absoluta mas sim um padrão aceitável ou crível perante as regras da lógica «pura»: *se A, então B*. Não é importante que os números realmente existam, se dois mais três é igual a cinco, o que conta mesmo é a propriedade e os objetos (não a sua natureza...) em causa. Segundo a «gramática» – normas de construção – da chamada lógica do predicado, a comutatividade da adição é expressa da seguinte maneira:

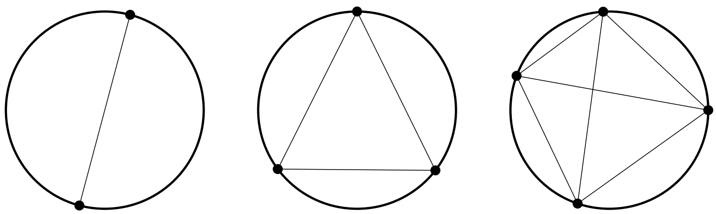
> Para todos os m e n, se m e n são inteiros
> (positivos ou negativos), então $m + n = n + m$.

Este modo de encarar a matemática acabou por alimentar uma corrente filosófica, conhecida por positivismo lógico, que argumenta(va) ser o método de verificação, os passos que seguimos, a luz que revela o caráter de uma determinada afirmação. Aceitamos como verdadeira a conclusão de Euler sobre o passeio através das pontes de Königsberg porque o seu raciocínio foi elegante e simplesmente... lógico. Não necessitamos testá-la no terreno.

Justificar-se-á esta inquietação dos matemáticos em fazer prova da maneira «certa» e, assim, fazê-la? Existem vários exemplos de que é fácil saltar para uma conclusão errada quando se procura generalizar um padrão a partir de alguns (poucos) casos representativos.

Considere uma circunferência. Marque nela dois pontos ao acaso e una-os com uma linha reta; o círculo fica seccionado em duas partes. Desenhe agora, numa outra circunferência, três pontos e ligue-os; dividirá o círculo em quatro regiões (Figura 1.4). Se marcar quatro pontos ($n = 4$) acabará com oito regiões.

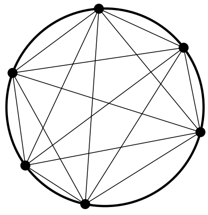
Figura 1.4



$n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

Um padrão começa a emergir: por cada ponto adicional, duplica-se o número de regiões. Podemos prever que, com $n = 5$, existirão 16 regiões. Um rabisco rápido confirma-o. Não vale a pena ir mais longe. Ou vale?...

Figura 1.5



$n = 6$

Como revela a figura anterior, unir mutuamente todos os seis pontos desenhados na circunferência não produziu 32 mas sim 31 secções. A fórmula para este padrão afinal não é tão simples: parecia ser

$$2^{n-1},$$

quando é

$$\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$$

Às ilusões dos sentidos e artimanhas do senso comum, os matemáticos respondem com o poder da inferência lógica. Se a matemática se joga no tabuleiro da razão, então ganhar é em suma uma questão de... fé. Regressaremos a este assunto num outro capítulo.

Um dos desafios que figuram no famoso livro de recordes *Guinness* é o de visitar todas as estações do Metro de Londres no menor intervalo de tempo possível. O *record*, no final de 2012, estava em 16 horas, 29 minutos e 13 segundos,[1] obtido por Andy James e Steve Wilson. Conseguir a mais curta e rápida jornada através dos comboios subterrâneos londrinos é uma das inúmeras versões complexas do «nosso» problema das pontes de Königsberg. Foi deste «jogo» inocente que surgiu a matemática que alimenta hoje os modernos motores de busca da internet, os quais procuram maximizar as ligações e redes que podem ser navegadas. Como referi, as dimensões físicas perderam peso, as distâncias foram encurtadas e a forma deixou de contar. Mas tudo isto veio demasiado tarde para influir na revolução científica que, no século dezassete, teve na geometria (analítica) um dos seus focos. Sem ela, no puro deleite noturno de um rodopiante fundo de constelações, olharíamos o espaço sideral profundo para dele apenas receber curiosidade e um temor encantatório.

---

(1) http://www.guinnessworldrecords.com/world-records/5000/fastest-time-to-travel-to--all-london-underground-stations.

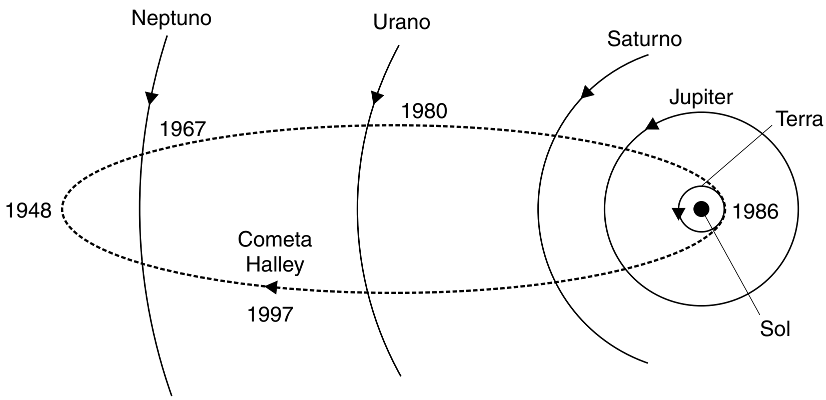
2

Céu

Todos os dias, quando nos levantamos da cama, ve(re)mos o Sol a espreitar acima do horizonte, aonde regressará umas horas mais tarde, no lado oposto, para um merecido descanso. Também observamos a Lua em diferentes posições no véu celeste, algumas vezes resplandecente, outras tímida. É difícil libertar-nos da impressão de que o Sol e a Lua giram em torno da Terra. Copérnico intuiu, Galileu acumulou numerosos dados observacionais, que é a Terra, ou Vénus, ou Marte..., que orbita(m) o Sol, permanecendo a Lua como um nosso satélite. Podemos pensar que os corpos planetários descrevem trajetórias circulares nas suas órbitas, mas não. São elipses.

A passagem de um cometa junto da Terra era até há pouco tempo motivo de excitação e algum pânico. Um sinal dos Deuses? Um prenúncio do fim do mundo?... Bem, ainda cá estamos, e agora mais sábios sobre o céu em movimento. O cometa mais familiar será o de Halley, com um período orbital de cerca de 76 anos e uma última aparição em 1986:

Figura 2.1. Representação da órbita regular do cometa Halley

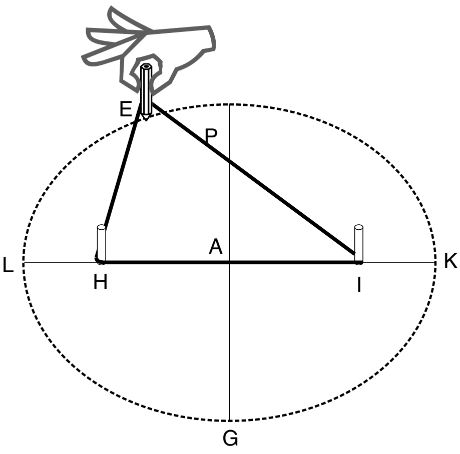


O ponto mais afastado do Sol fica para além da órbita de Neptuno, enquanto a passagem mais próxima se dá a uns meros 88.000.000 km de distância da estrela, fase em que se forma a cauda característica do cometa.

À primeira vista uma elipse resume-se a uma «bola» (círculo) mais ou menos achatada. Os Antigos Gregos, porém, viam nela interessantes propriedades; este povo mostrou saber pouco sobre muitas coisas[1] mas sabia tudo sobre as elipses, em particular uma forma engenhosa e simples de desenhá-las:

(1) Acreditava, por exemplo, na existência de uma série de esferas etéreas: a Terra, no centro, rodeada sucessivamente pelas esferas da água, do ar e do fogo, sendo todo o conjunto delimitado por esferas de cristal.

Figura 2.2. Método de desenho de uma elipse, em *Exercitationum Mathematicorum* (1657) de van Schooten

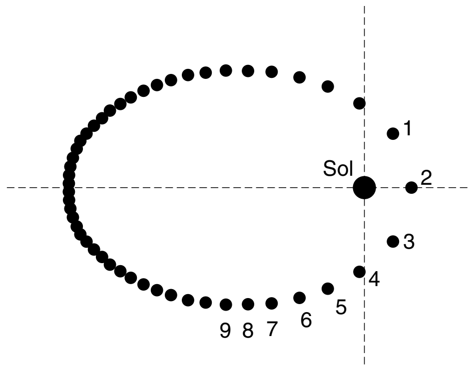


Começando com dois «pauzinhos» (os pontos focais), *H* e *I*, dispõe-se uma corda fechada em torno deles para, de seguida, estando o lápis no ponto *E* e a corda sempre esticada ao máximo, desenhar uma linha «orbital» de volta a *E*.

Sabia também que o perfil ou forma de um corte inclinado num cone é elíptico. E que, estando nós rodeados completamente por um espelho de contorno elíptico, segurando uma candeia no ponto *H*, qualquer raio de luz que atinja a superfície espelhada será refletido para o ponto *I*, e vice-versa. Apesar de inebriados por esta curva graciosa, que exibia tão variadas e interessantes propriedades geométricas, os Antigos Gregos foram incapazes de lhe extrair uma palpável implicação prática. Assim se manteve nos 2000 anos seguintes. O abanão que acordou a Humanidade para as potencialidades «físicas» da elipse foi dado pelo astrónomo alemão Johannes Kepler.

Analisando cuidadosamente inúmeras observações, entre as quais o movimento aparente de Marte através das constelações, Kepler deduziu que as órbitas planetárias são elipses e, mais notável, *que o Sol se localiza num dos pontos focais* (pontos *H* e *I*, na Figura 2.2). Kepler foi mais longe. Compreendeu que cada planeta acelera ao descrever a parte da órbita junto do Sol e que abranda ao se afastar do seu «íman» estelar. Se o meu caro leitor tivesse à sua disposição uma cópia de maiores dimensões da Figura 2.3, que revela a posição do planeta *X* à passagem de iguais intervalos de tempo...

Figura 2.3



Próximo do Sol, as sucessivas posições de *X* estão mais afastadas porque o planeta se move mais depressa: se esperarmos, digamos, 30 dias para obter cada 'fotografia', encontraremos o planeta mais longe da posição 'fotografada' anteriormente.

...poderia experimentar uma certa tarefa: desenhar um triângulo com vértices no Sol e nas posições 1 e 2 do planeta *X*; de seguida, 'triangulava' o Sol com as posições 7 e 8. Pintaria então o interior dos dois triângulos com uma caneta em que pudesse ver (e medir) a descida do nível de tinta. Vou adiantar-lhe que seria gasta a *mesma* quantidade de tinta. O meu amigo leitor descobriria deste modo, tal como Kepler, que cada planeta, ou melhor, a linha imaginária que o liga ao Sol, varre áreas iguais em iguais períodos de tempo. Esta regularidade esteve na base de um outro importante avanço científico.

**“Deus criou os números [inteiros].
Tudo o resto é obra do homem.”**

Leopold Kronecker (1823-1891)

Ninguém, entre milhares de milhões de seres humanos, será capaz de conceber o mundo sem a matemática. Dependemos dela. E antes de precisar da matemática, precisámos dos números. Estão por todo o lado e em muitos dos nossos pensamentos.

Não obstante, os filósofos não atingem um consenso definitivo quanto ao estatuto dos números e, por conseguinte, da matemática: tem uma existência real, exterior à cultura humana, ou é uma construção intelectual útil para dar sentido ao mundo tal como o experienciamos?

Independente da inclinação filosófica do leitor, é um facto que a observação e interação com a natureza inspiraram a utilização dos números, e foi com estes que a jornada matemática da humanidade começou. Agora, deixemo-nos levar por muitas outras coisas, formas, seres, lugares e fenómenos, que tornam este mundo tão especial.

$\infty + 1$

**Uma jornada de (re)descoberta
da matemática à boleia
do mundo em que vivemos**

488
ISBN 978-972-618-785-1
9 789726 187851