26

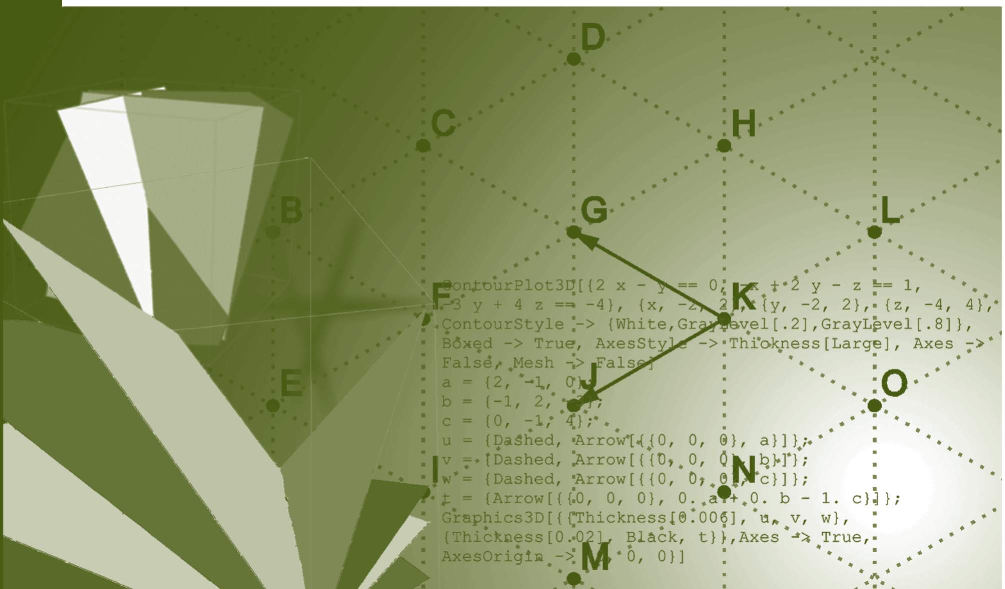
MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

TEORIA E PRÁTICA

Com exemplos de aplicações com Scilab, GeoGebra e Mathematica

RICARDO GONÇALVES



2ª Edição
Revista e Corrigida

Coleção Matemática

EDIÇÕES SÍLABO

À Teresa e à Catarina.

COLECÇÃO MATEMÁTICA

26

COLECÇÃO MATEMÁTICA

1 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
2 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n
3 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS
4 – FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA
5 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
6 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA
8 – CÁLCULO INTEGRAL EM *IR* – PRIMITIVAS
9 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – EXERCÍCIOS
10 – SUCESSÕES E SÉRIES
11 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
12 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM *IR*
13 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n – EXERCÍCIOS
14 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
15 – SUCESSÕES E SÉRIES – EXERCÍCIOS
16 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES
17 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – EXERCÍCIOS
18 – INTEGRAIS DUPLOS, TRIPLOS, DE LINHA E DE SUPERFÍCIE
19 – FUNDAMENTOS DE ANÁLISE NUMÉRICA
20 – MÉTODOS NUMÉRICOS – Introdução, Aplicação e Programação
21 – CÁLCULO INTEGRAL – Teoria e Aplicações
22 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Exercícios Resolvidos
23 – TÓPICOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA EM IR^n
24 – EXERCÍCIOS SOBRE PRIMITIVAS E INTEGRAIS
25 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Com Aplicações às Ciências Empresariais
26 – ÁLGEBRA LINEAR – TEORIA E PRÁTICA

ÁLGEBRA LINEAR

Teoria e Prática

Ricardo Jorge Castro Gonçalves

2ª EDIÇÃO
Revista e Corrigida

EDIÇÕES SÍLABO

FICHA TÉCNICA:

Título: Álgebra Linear – Teoria e Prática
Autor: Ricardo Jorge Castro Gonçalves
© Edições Sílabo, Lda.
Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, setembro de 2015
2ª Edição – Lisboa, setembro de 2018
Impressão e acabamentos: Europress, Lda.
Depósito Legal: 443511/18
ISBN: 978-972-618-958-9

EDIÇÕES SÍLABO, Lda.
Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Tel.: 218130345
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

ÍNDICE

PREFÁCIO

Este livro dirige-se aos alunos do ensino superior universitário e politécnico e que para o estudo da álgebra linear procuram uma abordagem alternativa, inovadora e facilitadora da aprendizagem dos principais temas.

Os estudos internacionais na área, desenvolvidos ao longo das últimas três décadas, apontaram um conjunto de recomendações didáticas para serem consideradas no ensino, com vista a melhorar o desempenho dos alunos na aprendizagem da álgebra linear. A elaboração deste texto resultou da vontade do autor em considerar extensivamente aquelas recomendações, possibilidade observável em alguma bibliografia internacional de referência, o que confere a este livro o principal elemento de destaque no panorama da bibliografia nacional. Desta forma, o livro propicia a fácil assimilação dos conteúdos, o desenvolvimento da destreza de cálculo e a capacidade de aplicação dos conceitos em situações díspares.

Sobre a importância de se recorrer ao uso da tecnologia, introduziu-se a utilização do *software* de computação simbólica Scilab, ao qual se pode aceder gratuitamente na WEB. A referência à possível utilização deste programa aparece sobretudo na exploração de exemplos, onde são introduzidos os comandos elementares que o aluno deve conhecer para a sua utilização autónoma. Nos exercícios, procurou-se promover o recurso ao Scilab pela via da ilustração de propriedades e pelo apoio a processos de cálculo em situações de cariz mais prático. Em paralelo, a interpretação geométrica dos conceitos é acompanhada pela utilização do ambiente de geometria dinâmica GeoGebra e do Mathematica.

Como forma de reduzir o caráter formal dos conceitos de álgebra linear, introduziu-se apenas a terminologia necessária, com uma linguagem e notação o mais simplificado possível. As definições e teoremas, destacados em caixas de cor, são os estritamente necessários e as demonstrações foram omitidas. Parte das propriedades associadas a alguns dos conceitos foram consideradas sob a forma de exercícios, onde se apela à sua ilustração. No sentido contrário, enfatizou-se o recurso a exemplos resolvidos e a aplicações, segundo o pressuposto de elucidar o como e quando aplicar os conceitos de álgebra linear. Para apoiar a utilização autónoma deste livro, os exercícios são acompanhados da sua resolução ou solução, aparecendo estas no final de cada capítulo.

Ao longo do texto, alguns conceitos são introduzidos precocemente como forma de os relacionar com outros. A ligação dos diferentes assuntos aos pré-requisitos foi tida em consideração no sentido de se justificar novas aprendizagens, a partir de situações mais elementares e familiares para o aluno. Destaca-se, neste contexto, a introdução do método de eliminação de Gauss, a partir da limitação dos métodos conhecidos para a resolução de sistemas até três equações e três incógnitas, e a introdução ao estudo dos espaços vetoriais. De salientar ainda a utilização estrita da linguagem matricial na exploração de todos os assuntos, onde o ponto de partida é a consideração de um vetor escrito como matriz coluna.

Em cada capítulo é proposta a resolução de uma tarefa. Excetuando-se a tarefa do Capítulo 3, cujo alcance é a aplicação de conteúdos, as tarefas enquadram-se na perspetiva de introdução dos conceitos, nomeadamente: multiplicação de matrizes (Tarefa 1), resolução de sistemas de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss (Tarefa 2) e combinação linear de vetores, subespaço vetorial gerado por um conjunto de vetores e base de um espaço vetorial (Tarefa 4).

Em termos de estrutura, o livro está dividido em quatro capítulos, referentes ao estudo das matrizes, sistemas de equações lineares, determinantes e espaços vetoriais, nesta ordem. A opção pelo estudo inicial das matrizes é coerente com a exploração matricial dos restantes conceitos, corrente sugerida pelo Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG), segundo a designação *matrix oriented course*. À introdução das designações elementares atribuídas às matrizes, segue-se a exploração das operações com matrizes. O capítulo termina com a extensão das matrizes a situações do quotidiano e algumas das suas aplicações.

O segundo capítulo é iniciado com a revisão da resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas e com três equações e três incógnitas, segundo o método gráfico, método de substituição e método de adição ordenada. Após a identificação das limitações de aplicação destes métodos na resolução de sistemas com um número maior de equações e de incógnitas, formalizam-se os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan como um processo algorítmico consequente com o método de adição ordenada e método de substituição. Segue-se a introdução de um algoritmo para a determinação da matriz inversa a partir da ideia intuitiva da resolução conjunta de sistemas de equações lineares com a mesma matriz simples, mas com termos independentes diferentes. Um número considerável de exercícios remete para a aplicação da resolução de sistemas de equações lineares em situações concretas e cuja resolução, pela complexidade de cálculo, deve ser apoiada com a utilização do *software* Scilab.

O capítulo referente ao estudo dos determinantes começa por contemplar a definição de determinante como função, conjuntamente com três propriedades. A partir destas, são deduzidas todas as propriedades, ilustradas com matrizes de ordem 2. Continua-se com a introdução dos algoritmos para o cálculo de determinantes de qualquer ordem, a par da sua aplicação no cálculo de áreas e volumes. O capítulo termina com a aplicação dos determinantes no cálculo da matriz inversa e na resolução de sistemas de equações lineares possíveis e determinados.

A introdução ao estudo dos espaços vetoriais é feita com a associação ao conceito de vetor livre e às operações e propriedades conhecidas. Segue-se o desafio de identificar outros entes matemáticos com operações similares e com as mesmas propriedades que aqueles, até se formalizar o conceito de espaço vetorial como uma estrutura abstrata constituída por um conjunto e duas operações e onde se verificam dez axiomas. Segue-se a exploração, nesta ordem, dos conceitos de subespaço vetorial de um espaço vetorial, combinação linear de vetores, subespaço vetorial gerado, dependência e independência linear de vetores, base e dimensão de um espaço vetorial, com grande ênfase na interpretação geométrica e na relação dos conceitos entre si.

Uma nota final de agradecimento à Prof. Doutora Cecília Costa, por todo o apoio prestado, ao nível da discussão de ideias, apresentação de sugestões e revisão pedagógica e científica do texto, e ainda pela enorme disponibilidade demonstrada; à Prof. Doutora Paula Catarino, pela revisão científica do texto; à Prof. Doutora Teresa Abreu, minha mulher e também entusiasta da álgebra linear, pelas longas conversas mantidas em torno do assunto e pela ajuda prestada.

O autor

CAPÍTULO 1

Matrizes

1.1. A linguagem das matrizes

Uma *matriz* é entendida como um quadro retangular completo de valores[1] – *escalares* – com um certo número de filas horizontais – *linhas* – e um certo número de filas verticais – *colunas*.

Esta nova representação tem a si associada um leque de definições, notações, operações e propriedades, a par de inúmeras aplicações em diversas áreas da ciência, nomeadamente na matemática, na física, na economia, na computação gráfica, na eletrónica e na mecânica, entre outras.

Definição 1.1. Uma *matriz* A de dimensão $m \times n$ é um quadro de dupla entrada, com m linhas e n colunas, contendo os *elementos* $a_{ij} \in \mathbb{R}$, com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, representada por

$$A = [\, a_{ij} \,] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

O elemento genérico a_{ij} da matriz representa o escalar que se encontra na linha *i* e na coluna *j*. Diz-se que $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

A representação de um vetor, conhecida de ciclos de ensino anteriores, passa a relacionar-se com a linguagem matricial. Um *vetor* é conhecido como uma sequência ordenada de valores que são as suas coordenadas. A evolução da linguagem em termos da representação de um vetor na aproximação à linguagem das matrizes aparece registada nos seguintes exemplos:

Em $\mathbb{R}^2$: $\vec{u} = (2, -3) \quad \rightarrow \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$;

Em $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (2, -3, -4) \quad \rightarrow \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$;

---

(1) Neste texto serão considerados apenas números reais.

$$\text{Em } \mathbb{R}^4 : \vec{u} = (2,-3,-4,1) \qquad \rightarrow \qquad u = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, um *m*-uplo de números reais

$$u = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

corresponde no texto a uma matriz coluna com *m* linhas. Neste seguimento, uma matriz com dimensão $m \times n$ representa *n* vetores em $\mathbb{R}^m$.

Exemplo 1.1	Dimensão e entradas da matriz *A*: $$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 14 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$ A matriz *A* tem 3 linhas e 4 colunas, dizendo-se de dimensão 3×4 e os seus elementos são escalares reais. Neste caso, $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Por exemplo, $a_{32} = 4$ é o elemento da matriz que se encontra na 3ª linha e 2ª coluna. Por vezes, em situações facilitadoras de leitura, apresenta-se o índice 3×4 para indicar a dimensão da matriz.

Algumas das designações atribuídas às matrizes, diferenciadas em termos da dimensão, dos seus elementos e relações entre eles, são formalizadas e exemplificadas como se segue.

Igualdade de matrizes

Os elementos que ocupam a mesma posição *ij* em duas matrizes quaisquer dizem-se homólogos. Duas matrizes são iguais quando têm a mesma dimensão e os mesmos elementos homólogos.

Exemplo 1.2	Igualdade de matrizes: $$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{9} \\ -5 & -3 \end{bmatrix};$$ $$\begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ b & 1 & -1 \\ -2 & a & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 3;$$ $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriz quadrada

Uma matriz quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz com igual número de linhas e de colunas. Nestes casos, diz-se que é uma matriz de *ordem n*. Os elementos a_{ij}, com $i = j$, constituem a diagonal principal da matriz, sendo a outra diagonal designada por diagonal secundária.

Exemplo 1.3	• Matriz quadrada de ordem 3, com escalares reais: $$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1,03 \\ \pi & 0 & 5 \\ -3 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$ • $B \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$: $$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriz linha e matriz coluna

A matriz linha e a matriz coluna caracterizam-se por ter uma única linha, pertencendo a $M_{1\times n}(\mathbb{R})$, e uma única coluna, pertencendo a $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$, respetivamente.

Exemplo 1.4	
	• A matriz $B \in M_{1\times 3}(\mathbb{R})$ é uma matriz linha: $$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$ • A matriz $A \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ é uma matriz coluna: $$A = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ e \end{bmatrix}.$$

Matriz nula

Uma matriz de qualquer dimensão com $a_{ij} = 0$, isto é, em que todos os seus elementos são nulos, é designada por matriz nula e representa-se por $0_{m\times n}$ ou 0_n (caso seja uma matriz quadrada). Em situações não ambíguas, é usual representar a matriz nula simplesmente por 0.

Exemplo 1.5	
	Matriz nula de diversas dimensões: $$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{1\times 1} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4} .$$

	[Scilab] _Construir a matriz nula $0_{3\times 5}$.

```
--->    zeros (3,5)
   ans =
         0.      0.      0.      0.      0.
         0.      0.      0.      0.      0.
         0.      0.      0.      0.      0.
```

Matriz diagonal, matriz escalar e matriz identidade

Uma matriz quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ cujos elementos acima e abaixo da diagonal principal são todos nulos designa-se por matriz diagonal. Numa matriz diagonal, caso os elementos da diagonal principal sejam todos iguais, a matriz pode-se designar por matriz escalar. No caso particular deste escalar ser igual a 1, diz-se que é a matriz identidade, representando-se, atendendo à ordem da matriz, por I_n .

Exemplo 1.6

- Matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 5} ; \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3} .$$

[Scilab] _Construir a matriz diagonal.

```
--->    diag ( [2; -1; 4] )
   ans =
         2.      0.      0.
         0.     -1.      0.
         0.      0.      4.
```

- Matriz identidade:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[Scilab] _Construir a matriz identidade I_3.

```
--->  eye (3,3)
  ans =
      1.    0.    0.
      0.    1.    0.
      0.    0.    1.
```

Matriz triangular

Uma matriz quadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é designada matriz triangular superior ou triangular inferior se os elementos abaixo ou acima da diagonal principal, respetivamente, são nulos. Note-se que a matriz diagonal pode ser identificada como simultaneamente triangular superior e triangular inferior.

Exemplo 1.7

- Matriz triangular inferior:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

- Matriz triangular superior:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{4\times 4}.$$

Matriz transposta e matriz simétrica

Quando se trocam as linhas de uma matriz A pelas suas colunas, obtém-se a matriz transposta de A e denota-se por A^T. Neste caso, se a matriz A tem dimensão $m \times n$, a matriz A^T terá dimensão $n \times m$. Se os elementos de uma matriz A são simétricos em relação à diagonal principal, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, com $i \neq j$, sendo A

RICARDO JORGE CASTRO GONÇALVES é licenciado em Ensino de Matemática pela Universidade de Aveiro, mestre na mesma área pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e doutor em Didática de Ciências e Tecnologia, especialidade de Didática das Ciências Matemáticas, pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. É docente no Instituto Politécnico do Cávado e do Ave, onde leciona unidades curriculares da área disciplinar Matemática e Estatística, em particular, Matemática Discreta e Álgebra Linear.

Este livro dirige-se aos alunos que frequentam uma primeira unidade curricular de álgebra linear ou similar e que procuram uma abordagem alternativa, inovadora e facilitadora da aprendizagem dos principais temas da álgebra linear.

O autor considerou extensivamente as principais recomendações didáticas conhecidas para o ensino da álgebra linear, resultando um texto bem estruturado científica e pedagogicamente. A utilização de *software* para a exploração teórica e prática dos assuntos, a apresentação de muitos exemplos e exercícios resolvidos e a consideração de inúmeras aplicações concretas da álgebra linear, conferem ao livro um cariz diferenciador dentro do panorama da bibliografia nacional.

509

ISBN 978-972-618-958-9

26 COLEÇÃO MATEMÁTICA