3

MATEMÁTICA

PRIMITIVAS E INTEGRAIS

MANUEL ALBERTO M. FERREIRA – ISABEL AMARAL

7ª Edição

Coleção Matemática

EDIÇÕES SÍLABO

COLEÇÃO MATEMÁTICA

3

COLEÇÃO MATEMÁTICA

1 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
2 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n
3 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS
4 – FORMULÁRIO DE MATEMÁTICA
5 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
6 – ÁLGEBRA LINEAR Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA
8 – CÁLCULO INTEGRAL EM *IR* – PRIMITIVAS
9 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – EXERCÍCIOS
10 – SUCESSÕES E SÉRIES
11 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 1 – Matrizes e Determinantes
12 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM *IR*
13 – CÁLCULO DIFERENCIAL EM IR^n – EXERCÍCIOS
14 – ÁLGEBRA LINEAR – Exercícios Vol. 2 – Espaços Vectoriais e Geometria Analítica
15 – SUCESSÕES E SÉRIES – EXERCÍCIOS
16 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES
17 – INTEGRAIS MÚLTIPLOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – EXERCÍCIOS
18 – INTEGRAIS DUPLOS, TRIPLOS, DE LINHA E DE SUPERFÍCIE
19 – FUNDAMENTOS DE ANÁLISE NUMÉRICA
20 – MÉTODOS NUMÉRICOS – Introdução, Aplicação e Programação
21 – CÁLCULO INTEGRAL – Teoria e Aplicações
22 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Exercícios Resolvidos
23 – TÓPICOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA EM IR^n
24 – EXERCÍCIOS SOBRE PRIMITIVAS E INTEGRAIS
25 – PRIMITIVAS E INTEGRAIS – Com Aplicações às Ciências Empresariais
26 – ÁLGEBRA LINEAR – Teoria e Prática

MANUEL ALBERTO M. FERREIRA
ISABEL AMARAL

PRIMITIVAS E INTEGRAIS

EDIÇÕES SÍLABO

Visite a Sílabo na rede
www.silabo.pt

FICHA TÉCNICA:

Título: Primitivas e Integrais
Autores: Manuel Alberto M. Ferreira, Isabel Amaral
© Edições Sílabo, Lda.
Capa: Pedro Mota

1ª Edição – Lisboa, 1986
7ª Edição – Lisboa, setembro de 2018
Impressão e acabamentos: Europress, Lda.
Depósito Legal: 445993/18
ISBN: 978-972-618-972-5

EDIÇÕES SÍLABO, Lda.
Publicamos conhecimento

Editor: Manuel Robalo

R. Cidade de Manchester, 2
1170-100 Lisboa
Telf.: 218130345
e-mail: silabo@silabo.pt
www.silabo.pt

Dedicamos este livro ao Senhor Professor J. J. Laginha,
agradecendo assim o incentivo que nos tem dado
ao longo de anos de trabalho em comum.

Manuel Alberto, Isabel Amaral

ÍNDICE

1

PRIMITIVAS

1. Definição. Generalidades

Diz-se que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, num certo intervalo, se em qualquer ponto desse intervalo $F'(x) = f(x)$.

Designando uma primitiva de $f(x)$ por $Pf(x)$, teremos

$$\boxed{Pf(x) = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)} \quad ,$$

em qualquer intervalo em que $F(x)$ seja primitiva de $f(x)$.

Sendo C uma contante,

$$[F(x) + C]' = F'(x),$$

Portanto, há uma infinidade de primitivas de uma certa função. Basta, após se ter determinado uma, juntar-lhe constantes diferentes, parra se obter uma colecção infinita de primitivas. O problema de Primitivação é um problema indeterminado. Põe-se, então, a questão de saber se, sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, todas as primitivas de $f(x)$ são da forma

$$\boxed{F(x) + C} \quad ,$$

sendo C uma constante.

Suponhamos, então, que $G(x)$, diferente de $F(x)$, é também uma primitiva de $f(x)$ (ambas no mesmo intervalo). Então,

$$F'(x) = G'(x).$$

Portanto, segundo um dos corolários do teorema de Langrange, tem-se $G(x) - F(x) = C$ pelo que

$$G(x) = F(x) + C.$$

Em conclusão: **duas primitivas de uma mesma função, num certo intervalo, diferem sempre de uma constante**. Assim, sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, num certo intervalo pode dizer-se que,

$$\boxed{Pf(x) = F(x) + C}$$

é a expressão geral das primitivas de $f(x)$ nesse intervalo, sendo C uma constante.

Exercício resolvido 1

a) Mostre que $\frac{x^2}{2}$ é uma primitiva de x em IR.

b) Escreva a expressão geral das primitivas de x em IR.

c) Determine a primitiva de x que passa pelo ponto $(0, 1)$.

Resolução

a) $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x, \forall x \in IR$ pelo que $\frac{x^2}{2}$ é, de facto, uma primitiva de x em IR.

b) Em face da alínea *a)*, podemos escrever

$$Px = \frac{x^2}{2} + C$$

c) Recorrendo a *b)*, podemos pôr $y = \frac{x^2}{2} + C$. Obrigando $(0, 1)$ a pertencer a esta função, obtemos $1 = 0 + C$, vindo $C = 1$. Então $y = \frac{x^2}{2} + 1$ é a primitiva de x que passa por $(0, 1)$.

Exercício resolvido 2

Considere a função $f(x) = \begin{cases} 5, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Mostre que:

a) $5x$ é uma primitiva de $f(x)$ em $]0, +\infty[$,

b) 8 é uma primitiva de $f(x)$ em $]-\infty, 0[$,

c) $f(x)$ não tem primitiva em IR.

Resolução

a) $5x$ é uma primitiva de $f(x)$, em $]0, +\infty[$ porque, nesse intervalo, $(5x)' = 5 = f(x)$.

b) 8 é uma primitiva de $f(x)$, em $]-\infty, 0[$, porque, nesse intervalo, $8' = 0 = f(x)$.

c) Se existisse uma primitiva de $f(x)$ em IR, designando-a por $F(x)$, teríamos

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(c), \quad \forall\, x < 0,$$

sendo $c \in\,]x; 0[$ (Teorema de Lagrange).

Mas $F'(c) = f(c) = 0$ visto que $c < 0$. Então,

$$F'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0.$$

Não se pode, portanto, ter $F'(0) = f(0) = 5$ pelo que não existe $P\,f(x)$ em IR, embora existam primitivas de $f(x)$ em $]0, +\infty[$ e $]-\infty, 0[$.

2. Primitivas imediatas e quase-imediatas

Como resulta da definição dada atrás, a operação de primitivação é inversa da de derivação.

Portanto, obtêm-se regras de primitivação invertendo as de derivação. As primitivas que se determinam aplicando apenas essas regras, chamam-se Primitivas imediatas. Àquelas cuja determinação exige algumas operações preliminares, antes da aplicação das regras, chama-se Primitivas quase-imediatas.

Vamos então, analisar essas regras e ver exemplos da sua aplicação:

1. $(Kx)' = KX' = K$ desde que K seja uma constante. Então,

$$\boxed{P\,K = Kx + C}$$

sendo K e C constantes. Por exemplo, $P\,2 = 2x + C$, $P\,5 = 5x + C$, etc.

2. Sendo u uma função de x, temos

$$\boxed{P\,Ku = K\,Pu + C}$$

com K e C constantes, visto que $(K\,Pu)' = K\,(Pu)' = Ku$.

Esta regra, embora simples, é bastante útil. Mostra que as constantes multiplicativas podem transitar através do sinal de primitivação. Por exemplo, $P\,5\,\mathrm{sen}\,x = 5\,P\,\mathrm{sen}\,x$, $P\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{2}\,P\,2\,\mathrm{tg}\,x$, etc.

3. Sendo u uma função de x e α uma constante temos (supondo que $\alpha \neq -1$) $\left(\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \dfrac{(\alpha+1)\,u^{\alpha}\cdot u'}{\alpha+1} = u^{\alpha}\cdot u'$. Então,

$$\boxed{P\,u^{\alpha}\cdot u' = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1}$$

Vejamos alguns exemplos:

$$P\,x = \frac{x^2}{2} + C, \quad u = x, \quad \alpha = 1 \quad \text{e} \quad u' = 1.$$

$$P\,(x-1)^2 = \frac{(x-1)^3}{3} + C, \quad u = x-1, \quad \alpha = 2 \quad \text{e} \quad u' = 1.$$

$$P\,(x^3-1)^5\,3x^2 = \frac{(x^3-1)^6}{6} + C,$$
$$u = x^3 - 1,\ \alpha = 5 \ \text{e}\ u' = 3x^2.$$

$$P\,\frac{2x}{(x^2+1)^2} = P\,(x^2+1)^{-2}\cdot 2x =$$
$$= \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + C =$$
$$= -\frac{1}{x^2+1}.$$
$$u = x^2+1,\ \alpha = -2 \ \text{e}\ u' = 2x.$$

$$P\, 5\sqrt{5x+30} = P\,(5x+30)^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = \frac{(5x+30)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(5x+30)^3} + C,$$

$$u = 5x + 30, \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad u' = 5.$$

$$P\,\frac{-4x^3}{\sqrt[3]{12-x^4}} = P\,(12-x^4)^{-\frac{1}{3}}\,(-4x^3) =$$

$$= \frac{(12-x^4)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(12-x^4)^2} + C.$$

$$u = 12 - x^4, \quad \alpha = \frac{-1}{3} \quad \text{e}\; u' = -4x^3.$$

$$P\,\frac{\ln^2 x}{x} = P\,(\ln x)^2\,\frac{1}{x} = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$u = \ln x, \quad \alpha = 2 \quad \text{e} \quad u' = \frac{1}{x}.$$

$$P\,\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} = P\,\operatorname{arc\,tg} x\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{\operatorname{arc\,tg}^2 x}{2} + C.$$

$$u = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \alpha = 1 \quad \text{e} \quad u' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$P\,\operatorname{sen}^2 x \cos x = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.$$

$$u = \operatorname{sen} x, \quad \alpha = 2 \quad \text{e} \quad u' = \cos x.$$

$$P\,\operatorname{tg}^3 x \sec^2 x = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$$

$$u = \operatorname{tg} x, \quad \alpha = 3 \quad \text{e} \quad u' = \sec^2 x.$$

$$P\,(1+e^x)^3\,e^x \;=\; \frac{(1+e^x)^4}{4} + C.$$

$$u = 1 + e^x, \quad \alpha = 3 \quad \text{e} \quad u' = e^x.$$

$$P\,\frac{1}{x\,(3+\ln x)^3} = P\,(3+\ln x)^{-3}\,\frac{1}{x} = \frac{(3+\ln x)^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\,\frac{1}{2\,(3+\ln x)^2} + C.$$

$$u = 3 + \ln x, \quad \alpha = -3 \quad \text{e} \quad u' = \frac{1}{x}.$$

Vamos ver agora, exemplos de casos em que aplicando 2), é necessário recorrer a constantes multiplicativas para se obter u':

$$P\,(x^2-1)^3\,x = \frac{1}{2}\,P\,(x^2-1)^3\,2x = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-1)^4}{4} + C =$$

$$= \frac{(x^2-1)^4}{8} + C.$$

$$P\,(3x^2-6x+9)^5\,(x-1) = \frac{1}{6}\,P\,(3x^2-6x+9)^5\,(6x-6) =$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{(3x^2-6x+9)^6}{6} + C =$$

$$= \frac{(3x^2-6x+9)^6}{36} + C.$$

$$P\,\frac{x}{(1+x^2)^3} = P\,(1+x^2)^{-3}\,x =$$

$$= \frac{1}{2}\,P\,(1+x^2)^{-3}\,2x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\,\frac{1}{4\,(1+x^2)^2} + C.$$

$$P\,\sqrt[5]{1+5x^3}\cdot x^2 = P\,(1+5x^3)^{\frac{1}{5}}\,x^2 =$$

$$= \frac{1}{15}\,P\,(1+5x^3)^{\frac{1}{5}}\,15x^2 =$$

$$= \frac{1}{15}\,\frac{(1+5x^3)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{18}\,\sqrt[5]{(1+5x^3)^6} + C.$$

$$P\,\frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^3} = P\,(1+e^{2x})^{-3}\,e^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\,P\,(1+e^{2x})^{-3}\,2e^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(1+e^{2x})^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\,\frac{1}{4\,(1+e^{2x})^2} + C.$$

$$P\,(1+\cos x)^5\,\mathrm{sen}\,x = -\,P\,(1+\cos x)^5\,(-\,\mathrm{sen}\,x) =$$

$$= -\,\frac{(1+\cos x)^6}{6} + C.$$

4. Em 3) está excluída a situação $\alpha = -1$. Neste caso teremos

$$P\,u^{-1}\,u' = P\,\frac{u'}{u}.$$

Recordemos que $(\log u)' = \dfrac{u'}{u}$ e $[\ln(-\,u)]' = \dfrac{-\,u'}{-\,u} = \dfrac{u'}{u}$.

No primeiro caso tem de ser $u > 0$ e, no segundo $u < 0$. Será então,

$$\boxed{P\,\frac{u'}{u} = \ln|u| + C}$$

fórmula válida desde que $u \neq 0$.

Esta fórmula contempla as situações em que 3) falha. Vejamos alguns exemplos:

$$P\,\frac{1}{x} = \ln|x| + C.$$

$$P\,\frac{2x}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + C.$$

Repare-se que $1 + x^2 > 0$ para qualquer valor de x.

$$P\,\frac{x^2}{1+x^3} = \frac{1}{3}\,P\,\frac{3x^2}{1+x^3} = \ln|1+x^3| + C.$$

$$P\,\frac{1}{x\ln x} = P\,\frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

$$P\,\frac{e^x}{1+e^x} = \ln(1+e^x) + C \text{ } (e^x > 0\text{, qualquer que seja } x).$$

$$P\,\frac{2^x}{-3+2^x} = \frac{1}{\ln 2}\,P\,\frac{2^x\ln 2}{-3+2^x} = \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln|2^x - 3| + C.$$

$$P\,\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x} = P\,\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arc\,tg} x} = \ln|\operatorname{arc\,tg} x| + C.$$

Repare-se na aplicação desta fórmula na primitivação de algumas funções trigonométricas:

$$P\operatorname{tg} x = P\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -P\,\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

$$P\operatorname{cotg} x = P\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \ln|\operatorname{sen} x| + C.$$

$$P\sec x = P\,\frac{\sec^2 x + \sec x\operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} = P\,\frac{(\sec x + \operatorname{tg} x)'}{\sec x + \operatorname{tg} x} =$$

$$= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

Outros livros Sílabo na área dos Métodos Quantitativos:

Análise de Dados para Ciências Sociais – A complementaridade do SPSS
Análise Multivariada de Dados Qualitativos – Utilização da Análise de Corresp. Múlt. com o SPSS
Conceitos de Matemática – Fundamentos para as Ciências da Vida
Descobrindo a Regressão – Com a Complementaridade do SPSS
Dicionário de Estatística
Estatística – Exercícios Vol. 1 – Probabilidade, Variáveis aleatórias
Estatística – Exercícios Vol. 2 – Distribuições, Inferência estatística
Estatística Aplicada – Vol. 1
Estatística Aplicada – Vol. 2
Estatística Descritiva
Estatística Descritiva – Manual de Auto-aprendizagem
Estatística Matemática – Vol. 1
Estatística Matemática – Vol. 2
Estatística Multivariada Aplicada
Estatística para Economia e Gestão – Instrumentos de Apoio à Tomada de Decisão
Exercícios de Estatística – Com Recurso ao SPSS
Exercícios de Estatística – Vol. 1
Exercícios de Estatística – Vol. 2
Exercícios de Estatística Aplicada – Vol. 1
Exercícios de Estatística Aplicada – Vol. 2
Exercícios de Estatística Descritiva para Ciências Sociais
Formulário de Estatística
Formulário de Matemática
Inferência Estatística – Com Utilização do SPSS e Gpower
Infinito +1
Introdução à Análise de Dados – Com Recurso ao SPSS
Investigação Operacional – Vol. 1 – Programação Linear
Investigação Operacional – Vol. 2 – Exercícios de Programação Linear
Investigação Operacional – Vol. 3 – Transportes, Afectação e Optimização em Redes
Investigação por Questionário
Matemática para Economia e Gestão
Probabilidade e Inferência Estatística – Exercícios Resolvidos
SPSS – Guia Prático de Utilização
SPSS Statistics – O Meu Manual de Consulta Rápida
Tabelas Estatísticas
Testes de Hipóteses com o SPSS – O Meu Manual de Consulta Rápida

Visite a Sílabo na rede:
www.silabo.pt

315
ISBN 978-972-618-972-5
9 789726 189725

3 COLEÇÃO MATEMÁTICA